

Las setenta y ocho cartas

El abismo matemático del Tarot

MM. Corvidius Ra de Tauraset

I. La cifra

Una baraja de tarot contiene setenta y ocho cartas: veintidós arcanos mayores y cincuenta y seis arcanos menores. Caben entre las manos, pueden extenderse sobre una mesa y es posible reconocerlas una por una. La cantidad parece modesta hasta que dejamos de contar objetos y comenzamos a contar las maneras en que esos objetos pueden ordenarse.

Con tres cartas diferentes, cualquiera de ellas puede ocupar la primera posición. Para la segunda quedan dos y para la última, una. La multiplicación produce seis ordenaciones. Una cuarta carta eleva el resultado a veinticuatro; una quinta, a ciento veinte. Este crecimiento obedece al factorial, que multiplica todos los enteros positivos desde el número elegido hasta uno:

$$P(n) = n!$$

Aplicado a una baraja completa, el procedimiento comienza con setenta y ocho alternativas para el primer lugar, continúa con setenta y siete para el segundo y disminuye hasta llegar a la última carta. El número de ordenaciones es:

$$78! = 78 \times 77 \times 76 \times \dots \times 1 \approx 1,13242811782063 \times 10^{115}$$

La operación arroja un número de ciento dieciséis cifras. Aun así, todavía omite una característica habitual de las lecturas de tarot: las cartas pueden aparecer derechas o invertidas respecto del lector.

Si admitimos ambas orientaciones y suponemos que cada carta puede invertirse independientemente de las demás, cada ordenación admite dos alternativas para la primera carta, dos para la segunda y así hasta la última. Tres cartas, que antes admitían seis ordenaciones, pasan a admitir ocho combinaciones de orientación para cada orden, es decir, cuarenta y ocho configuraciones en total. Con setenta y ocho cartas, la orientación añade el factor:

$$2^{78} = 302\,231\,454\,903\,657\,293\,676\,544$$

El conjunto de posibilidades queda determinado por el producto de ambos factores:

$$C = 78! \times 2^{78} \approx 3,42255397622739 \times 10^{138}$$

El resultado tiene ciento treinta y nueve cifras. Cuenta las configuraciones de una baraja completa cuando importa la posición de cada carta y se distinguen sus orientaciones. No cuenta interpretaciones, significados ni lecturas posibles; tampoco supone que todos esos estados sean igualmente fáciles de producir mediante una mezcla concreta. Es una magnitud combinatoria precisa.

A partir de cierto tamaño, escribir una cifra aporta muy poco a la imaginación. Los ceros se suceden sin producir una imagen y nuestra intuición trata de manera parecida cantidades que difieren en millones de órdenes de magnitud. Para concederle una dimensión a este número, habrá que someterlo a una unidad que conocemos bien: el segundo.

Imagina que tu libertad depende de esperar un segundo por cada configuración posible de la baraja. La condena durará exactamente $78! \times 2^{78}$ segundos. Durante ese tiempo podrás ocuparte de algunas tareas, con una condición: ninguna podrá ejecutarse más deprisa de lo que permitan las reglas impuestas.

II. Qué significa ese número

Tienes ante ti una sentencia que no admite apelación. No importa cuánto trabajes, negocies o ruegues; recuperarás la libertad únicamente cuando hayan transcurrido todos los segundos de la condena. Para distraerte podrás recorrer el mundo, utilizar materiales sin límite y restituir cuanto destruyas. Los impedimentos físicos quedan suspendidos. El tiempo, en cambio, conservará una disciplina inflexible.

Comenzarás sobre la línea del ecuador. Tu primera tarea consiste en caminar alrededor de la Tierra hasta regresar al punto de partida, pero solo podrás dar un paso de setenta y cinco centímetros cada billón de años: un millón de millones de años entre un movimiento y el siguiente.

Una espera semejante supera más de setenta veces la edad actual del universo. Entre dos pasos podrías presenciar el nacimiento y la extinción de incontables estrellas. Las galaxias alterarían su aspecto y buena parte del cosmos dejaría de parecerse a lo que conoces. Tú avanzarías setenta y cinco centímetros.

Debes completar los poco más de cuarenta mil kilómetros de la circunferencia ecuatorial. Cuando por fin regreses al lugar donde comenzaste, podrás retirar una gota de agua de los océanos. Una gota de tamaño corriente, de apenas cinco centésimas de mililitro. La apartarás definitivamente y volverás a caminar alrededor de la Tierra, respetando el mismo intervalo entre pasos, para retirar la segunda.

Tu tarea consiste en vaciar todos los océanos del planeta. Cada gota exige una vuelta completa al ecuador. Cada vuelta comprende más de cincuenta y tres millones de pasos, separados por un billón de años. Tendrás que retirar las aguas del Pacífico, del Atlántico y de todos los demás océanos, incluidas sus profundidades, hasta dejar expuestas las cuencas que hoy cubre el mar.

Cuando desaparezca la última gota, se te entregará una hoja de papel común, de una décima de milímetro de espesor. La colocarás sobre el suelo, devolverás el agua a su lugar y comenzarás nuevamente. Cada vaciado completo te dará derecho a añadir una hoja sobre la anterior; ninguna podrá obtenerse de otra manera.

Tu nueva tarea es levantar una columna de papel cuya altura equivalga a la distancia hasta el horizonte del universo observable: aproximadamente cuarenta y seis mil quinientos millones de años luz. La pila superará la atmósfera, dejará atrás la Luna y los planetas, alcanzará distancias galácticas y continuará creciendo mucho más allá de todo lo que podrías reconocer como un paisaje.

No existe una muralla material en ese horizonte. La altura es una medida acordada, lo mismo que la regla que te obliga a conseguir cada hoja mediante el vaciado de los océanos. La columna no necesita sostenerse por las leyes de la ingeniería; basta con que cada hoja ocupe su lugar y con que el tiempo necesario para obtenerla transcurra íntegramente.

Cuando añadas la última hoja y alcances la altura exigida, podrás recoger un grano de arena. Uno solo. Lo guardarás, desmontarás la columna, restituirás los océanos y comenzarás a trabajar para obtener el siguiente.

Tendrás que recoger toda la arena de los desiertos y playas de la Tierra. Para retirar cada grano construirás una nueva torre hasta el horizonte observable. Cada hoja exigirá vaciar todos los océanos, cada gota retirada exigirá una vuelta alrededor del planeta y cada paso de esa vuelta conservará su precio de un billón de años.

Imagina el Sahara convertido en una extensión de roca desnuda. Piensa en las costas del mundo privadas de sus playas y en los desiertos de todos los continentes despojados de sus granos. Para mantener un recuento definido, tu condena establece un inventario de cien mil trillones de granos de arena. No podrás omitir uno solo de ese inventario ni obtenerlo mediante un procedimiento abreviado.

El último grano terminará finalmente en tu recipiente. Habrás cumplido una tarea de una duración monstruosa, pero tu condena todavía no habrá avanzado lo suficiente para permitirte descansar. Ahora recibirás una cantidad ilimitada de pintura negra y un instrumento capaz de cubrir, en cada aplicación, un cuadrado de apenas dos décimas de milímetro por lado.

Tu siguiente trabajo consistirá en pintar de negro toda la superficie del Sol.

No podrás emplear un pincel mayor ni derramar la pintura de una sola vez. Para conseguir el derecho de realizar la primera marca, tendrás que devolver toda la arena a su lugar y repetir íntegramente el procedimiento necesario para retirarla. Cuando termines, podrás pintar un cuadradito negro sobre la superficie solar. Después restituirás el mundo y comenzarás nuevamente para ganarte el segundo.

Aquel diminuto cuadrado tendrá un área de cuatro cienmillonésimas de metro cuadrado. El Sol, por su parte, posee una superficie aproximada de seis trillones de metros cuadrados. Incluso bajo las reglas imposibles de tu condena, cubrir una extensión semejante con marcas tan pequeñas exigirá una cantidad de ciclos que dejará de tener sentido para cualquier observador.

La superficie solar se irá oscureciendo muy lentamente. Cada fragmento negro llevará consigo la retirada completa de los desiertos, todas las torres necesarias para obtener sus granos, todos los vaciados oceánicos para conseguir las hojas y las caminatas de un paso cada billón de años. La pintura avanzará, pero no hay forma de acelerar su crecimiento.

Cuando hayas cubierto hasta el último fragmento de la superficie solar, podrás acercarte a una pared, tomar una tiza blanca y dibujar una raya.

Una sola.

Limpiarás el Sol, devolverás la arena, restituirás las hojas y el agua, y comenzarás nuevamente. La segunda raya tendrá exactamente el mismo precio que la primera.

También la tercera. Ninguna de ellas podrá dibujarse hasta haber oscurecido por completo el Sol mediante el procedimiento establecido.

Seguirás trabajando. Diez rayas, cien, mil. La pared irá acumulando marcas mientras tú repites, sin abreviaturas, cada una de las tareas. Algún día llegarás a cien mil y, muchísimo después, al millón. A cada raya le habrá precedido una superficie solar completamente ennegrecida mediante pequeños cuadrados cuyo costo se mide en océanos, torres, arena y caminatas.

Cuando termines la raya número **1.137.032**, dejarás la tiza sobre la mesa. No comenzarás otra: el tiempo que falta no bastaría para completar el trabajo exigido por una raya adicional. A partir de ese momento cumplirás el resto de la condena sin realizar ninguna tarea.

Para que la espera resulte menos solitaria, se te concede un último privilegio. Retrocederás en el tiempo hasta la formación de la Tierra, hace aproximadamente cuatro mil quinientos cuarenta millones de años. Allí te instalarás y observarás cuanto suceda, sin alterar nada.

Verás enfriarse la superficie terrestre y formarse los océanos. Presenciarás el surgimiento de la vida, su diversificación y sus innumerables extinciones. Los dinosaurios aparecerán y desaparecerán mucho antes de que nuestra especie ocupe un lugar en la historia del planeta. Conocerás toda la aventura humana, incluidos los acontecimientos que hoy consideramos decisivos, y descubrirás cuánto duran cuando se contemplan desde una escala más extensa.

Después continuarás observando el futuro. La humanidad dejará de existir algún día, cualquiera que sea su destino. El Sol agotará el hidrógeno de su núcleo, se transformará en gigante roja y la Tierra perderá las condiciones que hicieron posible nuestra historia. La evolución de los restos estelares ocupará edades enteras, pero para ti seguirá tratándose de una espera.

A medida que transcurran períodos cada vez mayores, la formación de estrellas acabará por declinar. Las más longevas agotarán su combustible y las galaxias dejarán de poseer el aspecto luminoso que hoy reconocemos. Los agujeros negros podrán perdurar durante tiempos extraordinarios; bajo la predicción de la radiación de Hawking, incluso ellos terminarían evaporándose.

Imagina que han transcurrido 10^{100} años: un uno seguido de cien ceros, medido en años. Has atravesado una duración suficiente para abarcar escenarios remotos en los que enormes agujeros negros han desaparecido y el universo se aproxima a un estado cada vez más frío y diluido. No existe una fecha científicamente establecida para un fin literal del universo, pero has superado ya las escalas que solemos utilizar para describir su destino más lejano.

Entonces consultarás el reloj.

Te quedará prácticamente toda la espera.

Después de dibujar la última raya habían quedado pendientes aproximadamente $4,079 \times 10^{124}$ años. Los 10^{100} años transcurridos desde tu regreso al pasado apenas habrán consumido una fracción imperceptible de ese remanente. Tendrás que seguir esperando aun cuando ya no quede, en aquel escenario, casi nada reconocible que contemplar.

Y esa última espera, que supera por una distancia inconcebible las edades del Sol y las escalas habituales de evolución cósmica, representa apenas el **0,0000376 %** de toda tu condena. El otro **99,9999624 %** lo habías consumido dibujando poco más de un millón de rayas de tiza.

Cada raya exigió pintar por completo la superficie del Sol. Cada marca de pintura exigió retirar toda la arena del planeta. Cada grano costó una torre de papel hasta el horizonte observable. Cada hoja costó vaciar todos los océanos y cada gota de esos océanos, una vuelta completa al ecuador, avanzando setenta y cinco centímetros cada billón de años.

Todo ese trabajo, seguido por una espera durante la cual incluso el futuro remoto del cosmos se vuelve insignificante, solo ha consumido un segundo por cada configuración posible de setenta y ocho cartas, considerando sus posiciones y sus orientaciones derechas o invertidas.

Setenta y ocho cartas. Una baraja que cabe entre las manos.

Y un número que permanece intacto cada vez que vuelves a mezclarlas sobre la mesa.

III. Demostración matemática

1. Configuraciones de una baraja con inversiones

Para n elementos distinguibles, el número de permutaciones es $n!$. Si cada elemento admite dos orientaciones independientes, hay 2^n asignaciones de orientación para cada permutación. El principio multiplicativo da:

$$C(n) = n! \times 2^n$$

Con setenta y ocho cartas:

$$C(78) = 78! \times 2^{78}$$

$$78! \approx 1,1324281178206298 \times 10^{115}$$

$$2^{78} = 302231454903657293676544$$

$$C(78) \approx 3,4225539762273918 \times 10^{138}$$

El número de configuraciones posee ciento treinta y nueve cifras. La igualdad es exacta antes de redondear su representación decimal. La orientación de cada carta se cuenta respecto del lector; girar simplemente toda la baraja como un bloque no permite sustituir el factor 2^{78} .

Cada configuración se hace corresponder con un segundo. En consecuencia, el tiempo total de la condena es $T_c = C(78)$ segundos.

2. Magnitudes adoptadas

Magnitud	Valor
Circunferencia ecuatorial de la Tierra	40.075.017 m
Longitud de cada paso	0,75 m
Intervalo entre pasos	10^{12} años
Duración del año	31.557.600 s
Volumen conjunto de los océanos	$1,335 \times 10^{18} \text{ m}^3$
Volumen de una gota	$5 \times 10^{-8} \text{ m}^3$
Espesor de una hoja de papel	10^{-4} m
Distancia al horizonte observable	$4,399239669750072 \times 10^{26} \text{ m}$
Inventario de arena	10^{23} granos
Superficie solar	$6,079 \times 10^{18} \text{ m}^2$
Lado de una marca de pintura	$2 \times 10^{-4} \text{ m}$

Las magnitudes astronómicas y geográficas son aproximadas. El tamaño de las gotas, las hojas, las marcas y el inventario de arena constituyen parámetros fijados para la operación. La cifra de arena no equivale a un censo físico de los granos existentes en la

Tierra. Las acciones pueden reiniciarse sin costo adicional de tiempo y se supone que cada superficie se cubre sin pérdidas ni superposiciones.

3. Tiempo de una vuelta al ecuador

La cantidad de pasos necesarios resulta de dividir la circunferencia ecuatorial entre la longitud de cada paso:

$$N_P = \frac{40\,075\,017}{0,75} = 53\,433\,356$$

Cada paso tarda un billón de años. Con un año de 31.557.600 segundos:

$$T_P = 10^{12} \times 31\,557\,600 = 3,15576 \times 10^{19} \text{ s}$$

El tiempo requerido para completar una vuelta es:

$$T_V = N_P T_P = 1,6862284753056 \times 10^{27} \text{ s}$$

4. Tiempo necesario para vaciar todos los océanos

El número de gotas contenidas en el volumen oceánico convenido es:

$$N_G = \frac{1,335 \times 10^{18}}{5 \times 10^{-8}} = 2,67 \times 10^{25}$$

Una vuelta permite retirar una gota. El tiempo de vaciado completo es:

$$T_O = N_G T_V = 4,502230029065952 \times 10^{52} \text{ s}$$

Cada vaciado proporciona una hoja de papel.

5. Tiempo necesario para levantar la torre de papel

La altura convenida equivale a 46.500 millones de años luz. Adoptando $9,4607304725808 \times 10^{15}$ metros por año luz:

$$H = (46,5 \times 10^9)(9,4607304725808 \times 10^{15}) = 4,399239669750072 \times 10^{26} \text{ m}$$

Con hojas de una décima de milímetro, el número de unidades necesarias es:

$$N_H = \frac{H}{10^{-4}} = 4,399239669750072 \times 10^{30}$$

Como cada hoja exige vaciar los océanos:

$$T_H = N_H T_O \approx 1,9806388946206956 \times 10^{83} \text{ s}$$

Ese intervalo corresponde a una torre completa y, por tanto, al derecho de recoger un grano de arena.

6. Tiempo necesario para retirar toda la arena

El inventario fijado contiene $N_A = 10^{23}$ granos. Cada grano exige construir una torre, de modo que:

$$T_A = N_A T_H \approx 1,9806388946206956 \times 10^{106} \text{ s}$$

Al completar el inventario se obtiene el derecho de pintar un cuadrado sobre la superficie solar.

7. Tiempo necesario para pintar el Sol

La superficie solar aproximada se fija en $A_S = 6,079 \times 10^{18}$ metros cuadrados. Cada cuadrado de pintura mide 0,2 milímetros por lado:

$$A_M = (2 \times 10^{-4})^2 = 4 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

El número de marcas es:

$$N_M = \frac{A_S}{A_M} = 1,51975 \times 10^{26}$$

Cada marca requiere una retirada completa de la arena. El tiempo necesario para cubrir el Sol es:

$$T_S = N_M T_A \approx 3,0100759600998021 \times 10^{132} \text{ s}$$

Una superficie solar completamente pintada equivale a una raya de tiza.

8. Número de rayas completas

El cociente entre el tiempo de condena y el tiempo que cuesta obtener una raya es:

$$N_R = \frac{T_C}{T_S} \approx 1\,137\,032,4276181766$$

Como únicamente se registran ciclos terminados, el número de rayas corresponde a la parte entera:

$$N_{\text{completas}} = [N_R] = 1\,137\,032$$

El tiempo disponible no alcanza para completar la raya siguiente.

9. Tiempo restante de la condena

El remanente se determina restando del tiempo total lo consumido por las rayas completas:

$$T_R = T_C - N_{\text{completas}} T_S$$

$$T_R \approx 1,2871631936084722 \times 10^{132} \text{ s}$$

Al convertir el resultado a años:

$$T_R^{(\text{años})} = \frac{T_R}{31\,557\,600} \approx 4,0787740310051214 \times 10^{124} \text{ años}$$

La proporción que representa este intervalo respecto de la condena es:

$$p_R = 100 \frac{T_R}{T_C} \approx 0,0000376082657\%$$

El trabajo completo consumió la proporción complementaria:

$$p_T = 100\% - p_R \approx 99,9999623917343\%$$

El remanente habría permitido realizar aproximadamente el 42,7618% de otro ciclo. En la condena narrada, ese tiempo se cumple esperando, sin comenzar una nueva raya.

10. Escala cósmica de la última espera

El intervalo restante supera en muchos órdenes de magnitud la edad actual del universo y los tiempos de evolución estelar. Incluso si transcurriera un período hipotético de 10^{100} años, asociado a escenarios muy remotos de evaporación de grandes agujeros negros, la fracción consumida de la espera sería:

$$p_c = 100 \frac{10^{100}}{4,0787740310051214 \times 10^{124}} \approx 2,4517 \times 10^{-23}\%$$

La duración de 10^{100} años es una referencia hipotética, no una fecha establecida para la desaparición del universo. Bajo los escenarios cosmológicos de expansión indefinida, tampoco existe un instante necesariamente identificable como el fin del tiempo.

11. Identidad de cierre

Todas las etapas anteriores quedan comprendidas en una sola igualdad:

$$78! \times 2^{78} = 1\,137\,032 \times T_S + T_R$$

Etapas	Tiempo en segundos
Una vuelta al ecuador	$1,686228 \times 10^{27}$
Vaciar todos los océanos	$4,502230 \times 10^{52}$
Levantar la torre de papel	$1,980639 \times 10^{83}$
Retirar la arena	$1,980639 \times 10^{106}$
Pintar el Sol y obtener una raya	$3,010076 \times 10^{132}$
Completar 1.137.032 rayas	$3,422553 \times 10^{138}$
Espera final	$1,287163 \times 10^{132}$
Tiempo total	$3,422554 \times 10^{138}$

El número $78! \times 2^{78}$ es exacto como resultado de combinatoria. El número de rayas y la duración de la espera resultan de los parámetros definidos para la condena, varios de ellos deliberadamente convencionales. Manteniéndolos constantes, la operación produce 1.137.032 rayas completas y un remanente de aproximadamente $4,079 \times 10^{124}$ años, equivalente al 0,0000376% del tiempo total.